第13講　独立・反復試行の確率と条件付き確率

§1　独立な試行の確率

要点整理 と 公式

要点 1　独立な試行

「独立」… ある 2 つの試行 S，T について，互いに他方の結果に影響を及ぼさないとき，2 つの試行は「　　　」である，という。

(ex)

・1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，1 回目に投げる試行を S，2 回目に投げる試行を T とすると，S と T は独立________。

・当たりくじ 3 本を含む10本のくじを A，B の 2 人がこの順に 1 本ずつ引く。A，B がくじを引く試行をそれぞれ S，T とし，引いたくじは元に戻さないとするとき，S と T は独立________。

要点 2　独立な試行の確率

1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，1 回目の試行と 2 回目の試行は独立である。

この 2 回の試行を行うとき，起こりうるすべての場合の数は________通りである。

また「1 回目に偶数，2 回目に 4 以下の目が出る」という事象が起こる場合の数は，積の法則より________通りである。

よって，これが起こる確率を p とすると　$p=$　　　　　　　　と表される。

これは，1 個のさいころを投げるとき

「偶数が出る」確率______と，「4 以下の目が出る」確率______の「　　」になっている。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，次のことが成り立つ。

■ **独立な試行の確率**

2つの試行S，Tが独立であるとき，Sでは事象 A，Tでは事象 B が起こる確率 p は

$p = P(A) \times P(B)$

3つ以上の独立な試行についても，これと同様の等式が成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

1個のさいころを2回続けて投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　1回目に奇数の目，2回目に6の約数の目が出る確率

(2)　少なくとも1回は奇数の目が出る確率

Point Pickup

独立な試行の確率

各試行が，他の試行に影響を及ぼさない，いわゆる「　　　」であるとき，

それぞれの試行の確率を求め，それらの「　　」を求める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 独立試行から加法定理へ

要点整理 と 公式

要点3 排反→独立試行→加法定理

袋Aには赤玉3個，白玉2個，袋Bには赤玉4個，白玉3個が入っている。

それぞれの袋から玉を1個ずつ取り出すとき，取り出した2個の玉が異なる色である確率を求める。

袋Aから玉を1個取り出す試行と，袋Bから玉を1個取り出す試行は独立である。

取り出した2個の玉の色が異なるという事象は，次の［1］，［2］のいずれか。

［1］　袋Aから赤玉，袋Bから白玉を取り出す

［2］　袋Aから白玉，袋Bから赤玉を取り出す

［1］の確率は　　　　　　　　　［2］の確率は $\frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{35}$

［1］，［2］は互いに排反であるから，求める確率は加法定理により

$$\qquad + \frac{8}{35} =$$

このように，ある事象が起こる確率を求めるとき，その事象を上の［1］，［2］のように最初に細かい事象に分けることで，各試行のそれぞれでどんな事象が起こればよいかがわかる。

細かい事象のそれぞれについて，互いに独立な試行であれば，各試行において起こるべき確率の「　　」を求める。

そして，最初に細かく分けた事象が「　　　　」であれば，加法定理によりそれら確率の「　　」を求めればよい。

※排反でないときは，和事象の考え方を用いる。

2つの事象A，Bについて，$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

袋Aには赤玉2個，白玉4個，袋Bには赤玉1個，白玉3個が入っている。それぞれの袋から玉を2個ずつ，合計4個取り出すとき，取り出した4個の中に赤玉が1個だけ含まれる確率を求めよ。

Point Pickup

細かい事象に分ける

①　確率を求めたい事象を，さらに細かい事象に分ける。

②　①のそれぞれの事象について，確率を求める。

各試行が独立試行ならば，それぞれの試行の確率の「積」を求める。

③　①の事象が排反ならば，②で出した確率の「和」を求める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 反復試行の確率

要点整理 と 公式

要点4 反復試行とは

同じ条件のもとで，同じ試行を繰り返し行うとき，各回の試行は独立である。

このような試行をまとめて「反復試行」という。

当たりくじ 4 本を含む10本のくじがある。引いたくじは元に戻すとして，このくじを 1 本ずつ続けて 3 本くじを引くとき，1 本だけ当たる確率を求める。

1 本だけ当たる事象は，次の［1］,［2］,［3］のいずれか。

［1］ 1 本目が当たり，2 本目がはずれ，3 本目がはずれ　$\dfrac{4}{10}\times\dfrac{6}{10}\times\dfrac{6}{10}=\dfrac{18}{125}$

［2］ 1 本目がはずれ，2 本目が当たり，3 本目がはずれ　$\dfrac{6}{10}\times\dfrac{4}{10}\times\dfrac{6}{10}=\dfrac{18}{125}$

［3］ 1 本目がはずれ，2 本目がはずれ，3 本目が当たり　$\dfrac{6}{10}\times\dfrac{6}{10}\times\dfrac{4}{10}=\dfrac{18}{125}$

［1］,［2］,［3］は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{18}{125}+\frac{18}{125}+\frac{18}{125}=\frac{18}{125}\times\qquad=\frac{54}{125}\cdots①$$ である。

［1］,［2］,［3］の確率はすべて「当たりが 1 本，はずれが 2 本」の確率であり，

その出る順番に関係なく　$\dfrac{4}{10}\times\dfrac{6}{10}\times\dfrac{6}{10}=$ ＿＿＿＿＿＿ である。

この確率になるものが［1］,［2］,［3］の 3 通りあるが，この 3 通りは

「3 回の試行のうち，当たりが出る 1 回を選ぶ」方法の総数　　　に等しい。

よって，①は ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ と表される。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

反復試行の確率について，次のことが成り立つ。

■ 反復試行の確率

1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。

この試行をn 回繰り返し行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r}$$

※一般に，正の数 a に関して，$a^0 = 1$ である。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

1 個のさいころを続けて 4 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　1 の目がちょうど 2 回出る確率

(2)　5 以上の目がちょうど 3 回出る確率

(3)　偶数の目が 2 回以上出る確率

Point Pickup

反復試行の確率

ある試行を，同じ条件のもとで n 回繰り返し行う反復試行において，

ある事象 A がちょうど r 回起こるとき，

①事象 A が起こる r 回の決め方の総数は　　　通り

② 1 回の試行において事象 A が起こる確率が p のとき，

①のそれぞれが起こる確率はすべて等しい。

①，②より，ある事象 A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r\, p^r(1-p)^{n-r}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 条件付き確率

要点整理 と 公式

要点5 条件付き確率

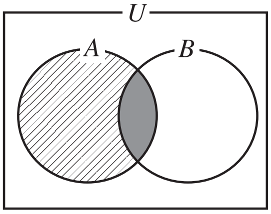
事象 A が起こったとわかっているときの，事象 B が起こる確率を，

A が起こったときの B の起こる「条件付き確率」といい，「　　　　　」と表す。

…①

事象 A が起こったとわかっているので，事象 A を「全事象」と

考えた上で，事象 $A \cap B$ が起こる場合の確率を考えればよい。



（ex）赤玉 4 個と白玉 2 個が入っている袋があり，赤玉には 1 から 4 まで，白玉には 5 と 6 の数字が書かれている。この袋の中から 1 個の玉を取り出したとき，玉の色が赤玉だった。このとき，その玉に書かれた数字が偶数である確率を求めたい。

赤玉が出る事象を A，玉に書かれた数字が偶数である事象を B とすると，

求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \qquad \text{である。}$$

「赤玉が出る」ことが前提なので，赤玉 4 個を母集団と考えるとよい。

また，①の右辺の分母・分子を，全事象 U の起こる場合の数 $n(U)$ で割ると，次の式が得られる。

…②

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

②の式の分母を払うと，次の等式が成り立つ。

■ **確率の乗法定理**

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$

$P(A\cap B)$は「2つの事象A，Bがともに起こる確率」である。

2つの試行S, Tにおいて，試行Sで事象Aが起こり，かつ試行Tで事象Bが起こる確率は，SとTが互いに「独立」であれば，$P(A)\times P(B)$で求められる。

SとTが互いに「独立ではない」とき，つまりSの結果によってTの結果が変化する場合には，$P(B)$ではなく，$P_A(B)$を用いる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

当たりくじ4本を含む20本のくじがある。引いたくじはもとに戻さないとして，1本ずつ 2回続けてくじを引く。このとき次の確率を求めよ。

(1)　1回目に当たりくじを引いたとき，2回目も当たりくじを引く確率

(2)　2回とも当たりくじを引く確率

(3)　2回目に当たりくじを引く確率

Point Pickup

条件付き確率

全事象が U である試行において，事象 A が起こったときの事象 B が起こる

条件付き確率 $P_A(B)$ は以下。

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}\cdots①\qquad P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\cdots②$$

②は，確率が与えられている，またはそれまでの問題で計算している場合に使うとよい。

確率の乗法定理

2つの事象 A，B がともに起こる確率$P(A\cap B)$は

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$

この場合の$P_A(B)$については，事象 A が起こった後の状態を考えた上で，

その状態の下で事象 B が起こるときの確率を求める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　確認テスト

1 袋Aには赤玉3個，白玉5個，袋Bには赤玉4個，白玉4個が入っている。それぞれの袋から玉を1個ずつ取り出すとき，両方とも赤玉が出る確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である。

2 1個のさいころを続けて5回投げるとき，奇数の目がちょうど4回出る確率は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ であり，奇数の目が4回以上出る確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$ である。

3 当たりくじ5本を含む20本のくじがある。引いたくじはもとに戻さないとして，A，Bの2人がこの順に1本ずつくじを引く。このとき，Aが当たる確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ であり，Aがはずれ, Bが当たる確率は $\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セソ}}$ である。さらに, Bが当たる確率は $\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　独立・反復試行の確率と条件付き確率

1　さいころを投げる各回の試行は独立である。

(1)　$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{1}{3}$

(2)　「少なくとも 1 回は奇数の目が出る」事象の余事象は，「2 回とも奇数以外の目が出る」事象である。

2 回とも奇数以外の目が出る確率は $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{4}$

よって，少なくとも 1 回は奇数の目が出る確率は $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

2　袋 A から玉を 2 個取り出す試行と，袋 B から玉を 2 個取り出す試行は独立である。

取り出した 4 個の中に赤玉が 1 個だけ含まれる事象は，次の［1］，［2］のいずれか。

［1］袋 A から赤玉 1 個と白玉 1 個，袋 B から白玉 2 個を取り出す

［2］袋 A から白玉 2 個，袋 B から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す

［1］の確率は $\dfrac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}\times\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{24}{90}$

［2］の確率は $\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times\dfrac{1\times{}_3C_1}{{}_4C_2}=\dfrac{18}{90}$

［1］，［2］は互いに排反であるから，求める確率は $\dfrac{24}{90}+\dfrac{18}{90}=\dfrac{42}{90}=\dfrac{7}{15}$

3

(1)　さいころを 1 回投げるとき，1 の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，求める確率は ${}_4C_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{25}{216}$

(2)　さいころを1 回投げるとき，5 以上の目が出る確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

よって，求める確率は ${}_4C_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=\dfrac{8}{81}$

(3)　さいころを1 回投げるとき，偶数の目が出る確率は $\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ である。

4 回投げて偶数の目が 2 回以上出るのは以下のとき。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［1］　偶数がちょうど2回出る

確率は $_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}$

［2］　偶数がちょうど3回出る

確率は $_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16}$

［3］　偶数が4回出る

確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

［1］，［2］，［3］の事象は互いに排反である。よって，求める確率は

$\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$

4

(1)　1回目に当たりくじを引く事象を A，2回目に当たりくじを引く事象を B とする。

求める確率は，A が起こったときの B が起こる条件付き確率であることより，

$$P_A(B)=\frac{3}{19}$$

(2)　事象 A が起こる確率は $P(A)=\frac{4}{20}\left(=\frac{1}{5}\right)$

よって求める確率は，$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=\frac{4}{20}\times\frac{3}{19}=\frac{12}{380}=\frac{3}{95}$

(3)　2回目に当たりくじを引く事象は，次の［1］，［2］のいずれか。

［1］　1回目に当たり，2回目も当たる

確率は，(2)より $\frac{3}{95}\left(=\frac{12}{380}\right)$

［2］　1回目ははずれ，2回目は当たる

確率は $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=\frac{16}{20}\times\frac{4}{19}=\frac{64}{380}$

［1］，［2］は互いに排反である。よって，求める確率は

$\frac{12}{380}+\frac{64}{380}=\frac{76}{380}=\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　確認テスト

1　袋Ａには赤玉３個，白玉５個，袋Ｂには赤玉４個，白玉４個が入っている。それぞれの袋から玉を１個ずつ取り出すとき，両方とも赤玉が出る確率は $\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である。

2　１個のさいころを続けて５回投げるとき，奇数の目がちょうど４回出る確率は $\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ であり，奇数の目が４回以上出る確率は $\frac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$ である。

3　当たりくじ５本を含む20本のくじがある。引いたくじはもとに戻さないとして，Ａ，Ｂの２人がこの順に１本ずつくじを引く。このとき，Ａが当たる確率は $\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ であり，Ａがはずれ，Ｂが当たる確率は $\frac{\boxed{シス}}{\boxed{セソ}}$ である。さらに，Ｂが当たる確率は $\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ である。

｛解答｝

1	ア　3	イ　1	ウ　6			
2	エ　5	オ　3	カ　2	キ　3	ク　1	ケ　6
3	コ　1	サ　4	シ　1	ス　5	セ　7	ソ　6
	タ　1	チ　4				

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。